数理解析研究所講究録 1452 巻 2005 年 91-95

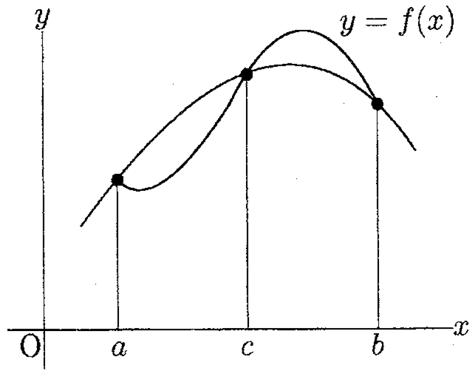
シンプソンの公式をめぐって

信州大学 理学部 髙木 啓行 (Hiroyuki Takagi)
Department of Mathematical Sciences, Faculty of Science, Shinshu University
信州大学大学院 工学系研究科 井上 朋久 (Tomohisa Inoue)
Graduate School of Science and Technology, Shinshu University
山形大学 工学部 髙橋 眞映 (Sin-Ei Takahasi)
Department of Basic Technology, Applied Mathematics and Physics, Yamagata University

$a<b,\ f\in C[a,b]$ のときの積分

$$I=\int_a^b f(x)\,dx$$

の近似値を与える公式が何種も知られている. 有名な公式を 3 つあげる.



(1) 台形公式 $T=\dfrac{b-a}{2}\big(f(a)+f(b)\big)$

(2) 中点公式 $M=(b-a)f(c)$

(3) シンプソンの公式 $S=\dfrac{b-a}{6}\big(f(a)+4f(c)+f(b)\big)$

ここで, $c=\dfrac{a+b}{2}$ である. $f(x)\geq 0$ の場合, 台形公式 T は, 4 点 $(a,0)$, $(b,0)$, $(b,f(b))$, $(a,f(a))$ を頂点とする台形の面積であり, 中点公式 M は, 底辺が $b-a$ で高さが $f(c)$ の長方形の面積, そして, シンプソンの公式 S は, 3 点 $(a,f(a))$, $(c,f(c))$, $(b,f(b))$ を通る放物線と, 直線 $x=a$, $x=b$ と x 軸とで囲まれた部分の面積である.

この講演では, これらの公式を, われわれの観点でながめてみたいと思う.

§1. $C^2[a,b]$ における誤差評価

$f\in C^2[a,b]$ の場合を考える. この場合, 上の 3 つの公式 (1)〜(3) について, 次の誤差評価が知られれている ([1, 補章 §6] や数値解析の書を参照).

(4) $$|I-T|\leq\frac{(b-a)^3}{12}\|f''\|,\quad |I-M|\leq\frac{(b-a)^3}{24}\|f''\|,\quad |I-S|\leq\frac{(b-a)^3}{36}\|f''\|.$$

ここで, $\|\cdot\|$ の意味は,

$$\|h\|=\max\big\{|h(x)|:a\leq x\leq b\big\}\qquad (h\in C[a,b])$$

である.

さて, 3 つの公式 (1)〜(3) を統合的にみるために, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ に対し,

$$A(\alpha,\beta)=(b-a)\Big(\alpha f(a)+(1-\alpha-\beta)f(c)+\beta f(b)\Big)$$

とおこう. $A(\alpha,\beta)$ は, $\alpha=\beta=\dfrac{1}{2}$ のとき台形公式 T, $\alpha=\beta=0$ のとき中点公式 M, $\alpha=\beta=\dfrac{1}{6}$ のときシンプソンの公式 S となる.

一般に, 誤差 $|I-A(\alpha,\beta)|$ を評価すると, 次のようになる.

定理 1. $a<b$, $c=\dfrac{a+b}{2}$, $f\in C^2[a,b]$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ のとき,

$$\left|I-A(\alpha,\beta)\right|\le\frac{(b-a)^3}{48}\Big(2|\alpha|+|4\alpha-1|+2|\beta|+|4\beta-1|\Big)\|f''\|+\frac{(b-a)^2}{2}|\alpha-\beta||f'(c)|$$

が成り立つ. 右辺は, α,β の関数とみると, $\alpha=\beta=\dfrac{1}{4}$ のとき最小になり,

$$\left|I-A\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)\right|\le\frac{(b-a)^3}{48}\|f''\|$$

となる.

この定理 1 で, $\alpha=\beta=\dfrac{1}{2}$, $\alpha=\beta=0$, $\alpha=\beta=\dfrac{1}{6}$ とすると, (4) が得られる. また, 定理の評価では, $\alpha=\beta=\dfrac{1}{4}$ の場合が最良といえる. そのときの近似式

$$A\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)=\frac{b-a}{4}\big(f(a)+f(c)\big)+\frac{b-a}{4}\big(f(c)+f(b)\big)$$

は, 分点が 3 点 a, c, b のときの台形公式である.

つぎに, 分点がたくさんある場合を考える. $f\in C[a,b]$ とする. 閉区間 $[a,b]$ における分点

$$a=x_0<x_1<\ \cdots\ <x_n=b$$

と, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}w_i=1$ を満たす実数 $w_0,w_1,\cdots,w_n$ に対し,

$$A(w_0,\cdots,w_n)=(b-a)\sum_{i=0}^{n}w_if(x_i)\tag{5}$$

とおく. このとき, 定理 1 と同様に次の定理が示せる.

定理 2. $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, $f\in C^2[a,b]$ とし, $w_0,w_1,\cdots,w_n$ は $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}w_i=1$ を満たす実数とする.

$$r_i=\frac{x_i-x_{i-1}}{b-a},\quad \lambda_i=\frac{(r_1+\cdots+r_i)-(w_0+\cdots+w_{i-1})}{r_i}\quad (i=1,\cdots,n)$$

とおくと,

$$\begin{aligned}&\left|I-A(w_0,\cdots,w_n)\right|\\ &\le\frac{(b-a)^3}{6}\sum_{i=1}^{n}r_i^3\big(|\lambda_i|+|2\lambda_i-1|\big)\|f''\|+\frac{(b-a)^2}{2}\sum_{i=1}^{n}r_i^2|2\lambda_i-1||f'(x_i)|\end{aligned}\tag{6}$$

が成り立つ. 右辺は, $w_0,w_1,\cdots,w_n$ の関数とみると,

$$(w_0,w_1,\cdots,w_n)=\left(\frac{r_1}{2},\frac{r_1+r_2}{2},\cdots,\frac{r_{n-1}+r_n}{2},\frac{r_n}{2}\right)$$

のとき最小になり,

$$\left|I-A\left(\frac{r_1}{2},\frac{r_1+r_2}{2},\cdots,\frac{r_{n-1}+r_n}{2},\frac{r_n}{2}\right)\right|\le\frac{(b-a)^3}{12}\sum_{i=1}^{n}r_i^3\|f''\|\tag{7}$$

となる.

定理2の近似式

$$A\left(\frac{r_1}{2}, \frac{r_1+r_2}{2}, \cdots, \frac{r_{n-1}+r_n}{2}, \frac{r_n}{2}\right)$$

は, 分点が $x_0, x_1, \cdots, x_n$ のときの台形公式である. よって, $\|f''\|$ を用いた評価では, 分点の数に関わらず, 台形公式が最良であるといえる. また, 不等式 (7) の右辺は, $r_1, \cdots, r_n$ の関数とみると, $r_1 = \cdots = r_n = \dfrac{1}{n}$ のときに最小になり, 分点は等間隔にとるのが最良であることもわかる.

定理2の証明のあらすじ $[0, b-a]$ 上の関数 Φ を

$$\Phi(t) = \sum_{i=1}^{n}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_{i-1}+r_it} f(x)\,dx - r_it\Big((1-\lambda_i)f(x_{i-1}) + \lambda_i f(x_{i-1}+r_it)\Big)\right)$$

と定める. すると, $\Phi(0) = \Phi'(0) = 0$ で,

$$\Phi''(t) = \sum_{i=1}^{n}\left(r_i^2(1-2\lambda_i)f'(x_{i-1}+r_it) - r_i^3\lambda_i t f''(x_{i-1}+r_it)\right)$$

である. ここで, 各 $i = 1, \cdots, n$ に対し, 平均値の定理を用い, $f'(x_{i-1}+r_it) - f'(x_{i-1}) = r_itf''(\tau_i)$ をみたす点 τ_i を, 開区間 $(x_{i-1},\ x_{i-1}+r_it)$ 内にとって, $|\Phi''(t)|$ を評価すると,

$$|\Phi''(t)| \le \sum_{i=1}^{n}\left(r_i^3\big(|\lambda_i| + |2\lambda_i-1|\big)\|f''\|\,t + r_i^2|2\lambda_i-1||f'(x_{i-1})|\right)$$

となる. これと,

$$\big|I - A(w_0, \cdots, w_n)\big| = \big|\Phi(b-a)\big| \le \int_0^{b-a}|\Phi'(s)|\,ds \le \int_0^{b-a}\left(\int_0^s|\Phi''(t)|\,dt\right)ds$$

とから, 評価式 (6) が得られる. 残りの主張は容易にわかる. □

§2. $C^1[a,b]$ における誤差評価

今度は, $f \in C^1[a,b]$ の場合を考えると, 定理2と同様にして次の定理が得られる.

定理 3. $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, $f \in C^1[a,b]$ とし, $w_0, w_1, \cdots, w_n$ は $\sum_{i=0}^{n} w_i = 1$ を満たす実数とする.

$$r_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{b-a}, \quad \lambda_i = \frac{(r_1+\cdots+r_i) - (w_0+\cdots+w_{i-1})}{r_i} \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

とおくと,

$$\big|I - A(w_0, \cdots, w_n)\big| \le \frac{(b-a)^2}{2}\sum_{i=1}^{n} r_i^2\big(|\lambda_i| + |\lambda_i - 1|\big)\|f'\|$$

が成り立つ. この右辺は, $w_0, w_1, \cdots, w_n$ の関数とみると, $0 \le \lambda_i \le 1$ $(i = 1, \cdots, n)$ かつ

$$\begin{aligned}&(w_0, w_1, \cdots, w_{n-1}, w_n)\\ &\quad = \Big((1-\lambda_1)r_1,\ \lambda_1r_1+(1-\lambda_2)r_2,\ \cdots,\ \lambda_{n-1}r_{n-1}+(1-\lambda_n)r_n,\ \lambda_nr_n\Big)\end{aligned}$$

と表せるとき, 最小になり,

$$|I - A| \le \frac{(b-a)^2}{2}\sum_{i=1}^{n} r_i^2\|f'\| \tag{8}$$

となる. ただし, $A = A\big((1-\lambda_1)r_1, \lambda_1r_1+(1-\lambda_2)r_2, \cdots, \lambda_{n-1}r_{n-1}+(1-\lambda_n)r_n, \lambda_nr_n\big)$.

定理3の近似式

$$A\Big((1-\lambda_1)r_1,\ \lambda_1 r_1+(1-\lambda_2)r_2,\ \cdots,\ \lambda_{n-1}r_{n-1}+(1-\lambda_n)r_n,\ \lambda_n r_n\Big)$$

はリーマン和である．よって，$\|f'\|$ を用いた評価では，分点の数に関わらず，最良になるときはリーマン和の形をしていることがわかる．また，不等式 (8) の右辺は，$r_1,\cdots,r_n$ の関数とみると，$r_1=\cdots=r_n=\dfrac{1}{n}$ のときに最小になり，分点は等間隔にとるのが最良であることもわかる．

§3. $C^3[a,b]$ における誤差評価

最後に，$f\in C^3[a,b]$ の場合を考えてみる．

定理 4. $a=x_0<x_1<\cdots<x_{2n}=b$, $f\in C^3[a,b]$ とし，$w_0,w_1,\cdots,w_{2n}$ は $\sum_{i=0}^{2n} w_i=1$ を満たす実数とする．

$$r_i=\frac{x_i-x_{i-1}}{b-a}\qquad(i=1,\cdots,2n)$$
$$\alpha_1=w_0,\quad \alpha_i=(w_0+\cdots+w_{2i-2})-(r_1+\cdots+r_{2i-2})\quad(i=2,\cdots,n)$$
$$\beta_i=(r_1+\cdots+r_{2i})-(w_0+\cdots+w_{2i-1})\quad(i=1,\cdots,n)$$

とおくと，

$$\begin{aligned}
&\big|I-A(w_0,\cdots,w_{2n})\big|\\
&\quad\le\frac{(b-a)^4}{24}\sum_{i=1}^{n} {r_{2i-1}}^3\Big(|\alpha_i|+|3\alpha_i-r_{2i-1}|\Big)+{r_{2i}}^3\Big(|\beta_i|+|3\beta_i-r_{2i}|\Big)\|f'''\|\\
&\qquad+\frac{(b-a)^3}{6}\sum_{i=1}^{n}\Big|{r_{2i-1}}^2(3\alpha_i-r_{2i-1})+{r_{2i}}^2(3\beta_i-r_{2i})\Big||f''(x_{2i-1})|\\
&\qquad+\frac{(b-a)^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\Big|({r_{2i}}^2-{r_{2i-1}}^2)+2(r_{2i-1}\alpha_i-r_{2i}\beta_i)\Big||f'(x_{2i-1})|
\end{aligned}$$

が成り立つ．右辺は，$w_0,w_1,\cdots,w_n$ の関数とみると，$r_{2i-1}=r_{2i}$ $(i=1,\cdots,n)$，かつ，

$$\begin{aligned}
&(w_0,w_1,w_2,w_3,w_4,\cdots,w_{2n-2},w_{2n-1},w_{2n})\\
&\quad=\Big(\frac{r_2}{3},\ \frac{4r_2}{3},\ \frac{r_2+r_4}{3},\ \frac{4r_4}{3},\ \frac{r_4+r_6}{3},\ \cdots,\ \frac{r_{2n-2}+r_{2n}}{3},\ \frac{4r_{2n}}{3},\ \frac{r_{2n}}{3}\Big)
\end{aligned}$$

のとき，最小になり，

$$|I-A|\le\frac{(b-a)^4}{36}\sum_{i=1}^{n}{r_{2i}}^4\|f'''\| \tag{9}$$

となる．ただし，$A=A\Big(\frac{r_2}{3},\frac{4r_2}{3},\frac{r_2+r_4}{3},\frac{4r_4}{3},\frac{r_4+r_6}{3},\cdots,\frac{r_{2n-2}+r_{2n}}{3},\frac{4r_{2n}}{3},\frac{r_{2n}}{3}\Big)$．

定理4の近似式

$$A\Big(\frac{r_2}{3},\frac{4r_2}{3},\frac{r_2+r_4}{3},\frac{4r_4}{3},\frac{r_4+r_6}{3},\cdots,\frac{r_{2n-2}+r_{2n}}{3},\frac{4r_{2n}}{3},\frac{r_{2n}}{3}\Big)$$

は，分点が $x_0,x_2,x_4,\cdots,x_{2n}$ のシンプソンの公式である．よって，$\|f'''\|$ を用いた評価では，分点の数に関わらず，シンプソンの公式が最良であるといえる．また，不等式 (9) の右

辺は, $r_2, \cdots, r_{2n}$ の関数とみると, $r_2 = \cdots = r_{2n} = \dfrac{1}{2n}$ のときに最小になり, 分点は等間隔にとるのが最良であることもわかる.

§4. 発展

1953年のコロフキンの定理 [4] に端を発するいわゆる「コロフキン型近似定理」が, 多くの数学者により研究されている ([2], [3]). その研究主旨にそって, さまざまな問題が設定できるが, そのひとつは次のように述べられよう.

問題. コンパクト・ハウスドルフ空間 X 上の連続関数全体のバナッハ空間を $C(X)$ とかき, その共役空間を $C(X)^*$ で表す. $\mathcal{S} \subset C(X)$, $\mu \in C(X)^*$, $x_1, \cdots, x_n \in X$ とし,

$$W = \left\{(w_1, \cdots, w_n) \in \mathbb{R}^n : \text{任意の } f \in \mathcal{S} \text{ に対して, } \mu(f) = \sum_{i=1}^{n} w_i\, f(x_i)\right\}$$

とおく. このとき, 次の2条件を満たす評価関数 $M(w_1, \cdots, w_n)$ と $C(X)$ 上のゲージ $|||\cdot|||$ を求めよ.

1. 任意の $f \in C(X)$ と $(w_1, \cdots, w_n) \in W$ に対し,
$$\left|\mu(f) - \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)\right| \leq M(w_1, \cdots, w_n)|||f|||.$$
2. 任意の $f \in \mathcal{S}$ に対し, $|||f||| = 0$.

この問題で

$$X = [a, b], \quad \mathcal{S} : \text{定数関数全体の場合}, \quad \mu(f) = \int_a^b f(x)\, dx$$

の場合が, §1〜§3 の内容になっている. われわれは, (4) を一般化した定理1がこの問題に関連していることに気づき, この問題を意識して, 積分 $I = \displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ の近似値を与える式 (5) をながめてみた. 定理2〜4の内容は, その裏にニュートン・コーツの公式の影を感じるが, 講演者たちはその実態をつかんでいない. 上記の問題を意識した美しい一般定理を得たいところである.

参 考 文 献

[1] 一松 信, 「解析学序説 上巻 (新版)」, 裳華房, 1981.

[2] 「コロフキン型近似定理」, 数理解析研究所講究録, **1243** (2002).

[3] F. Altomare and M. Campiti, "Korovkin-Type Approximation Theory and its Applications", Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1994.

[4] P.P. Korovkin, *On convergence of linear operators in the space of continuous functions*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR (N.S.), **90** (1953), 961–964 (In Russian).